

# Un modèle non-local intégral dépendant du temps: application à un réseau de fibres

E. Berthier<sup>a</sup>, C. Dascalu<sup>a</sup>, L. Ponson<sup>a</sup>

a. Institut Jean le Rond d'Alembert, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 PARIS

## Résumé :

*Nous présentons un modèle non-local continu d'endommagement formulé avec une dépendance au temps. Celui-ci se base sur une approche énergétique et tient compte des interactions entre les éléments du système via une formulation intégrale non-locale, dans laquelle une longueur microscopique intervient. A l'aide d'une approche de type champ de phase, on dérive la loi d'évolution de l'endommagement en chaque point du système. En l'appliquant à un réseau de fibres, on étudie l'influence de la vitesse de chargement et du rapport entre la longueur interne et la taille du système sur la réponse d'un matériau hétérogène. Ce modèle permet de retrouver les principales caractéristiques de la rupture quasi-fragile, mais aussi de se rapprocher du cas de la rupture fragile dans le cas d'une forte localisation des interactions ou pour de grandes vitesses de chargement.*

## Abstract :

*A time-dependent non-local continuous damage model is presented. It is based on an energetical approach and takes into account the interactions between elements of the system using an integral non-local formulation in which a microscopic length is included. Using a phase-field approach, we obtain the damage evolution law of each point of the system. This model is applied to a fiber bundle and we study the influence of the loading rate and ratio of the internal length and the system size on the macroscopic behavior of a heterogeneous material. This model captures the main characteristics of the quasi-brittle fracture, but also allows the observation of brittle behavior in the case of high localization or high loading rates.*

**Mots clefs : 3 maximum : mot-clef1 ; mot-clef2 ; mot-clef3**

## 1 Introduction

Les modèles de réseaux de fibres sont des modèles discrets très simples qui permettent de capturer les caractéristiques essentielles de la rupture fragile ou quasi-fragile des matériaux [6]. Dans ces systèmes modèles, les interactions sont générées par des lois de redistribution de la force microscopique d'une fibre qui s'endommage sur ses voisines. Ces interactions apparaissent de manière plus ou moins implicite dans le modèle.

On propose ici un nouveau modèle basé sur un critère énergétique et qui dépend de la vitesse de chargement et où les interactions entre fibres sont parfaitement contrôlées et prises en compte de manière intrinsèque dans la loi d'évolution de l'endommagement. Cette loi régit les grandeurs microscopiques (e.g. force sur une fibre) qui contrôlent la réponse macroscopique du système.

Pour cela, on formule un modèle non-local intégral où l'endommagement d'une fibre dépend de celui des autres fibres du réseau. Cette non-localité est formulée à partir d'un noyau, décrivant la forme des interactions. Une longueur d'interaction est introduite, elle contrôle le degré de non-localité du modèle et permet d'approcher le cas de la rupture fragile ou quasi-fragile. Ce modèle est appliqué ici au cas des réseaux de fibres mais reste une approche générale, applicable à d'autres systèmes continus.

## 2 Modèle

On considère une modélisation d'un réseau de fibres en tant que système continu pour lequel on développe un modèle d'endommagement non-local dépendant du temps. Ainsi, on considère un système unidimensionnel représenté par l'intervalle  $[0, L]$  dans lequel chaque point  $x$  représente la position d'une fibre élastique endommageable, de raideur  $C$ . Ce système est chargé dans la direction normale à l'axe  $x$  par un déplacement macroscopique uniforme en  $x$  :  $\Delta(t) = v \cdot t$ , où  $v$  est la vitesse de chargement. Le déplacement microscopique est alors  $\epsilon(x) = \Delta(t)$ . Lorsqu'on endommage le matériau en un point  $x$ , ce déplacement reste constant et c'est la raideur et la force microscopique qui varient. L'énergie élastique en  $x$  s'écrit

$$E(x) = \frac{1}{2}\epsilon^2(x)k_0(1 - d(x))^2 = \frac{1}{2}\epsilon^2(x)C(d) \quad (1)$$

où  $C(d) = k_0(1 - d(x))^2$  est la raideur locale, dépendante de l'endommagement. La forme quadratique est choisie en adéquation avec l'expression des constantes déterminées par des approches d'homogénéisation.

On a alors la force microscopique

$$f(x) = k_0(1 - d(x))^2\epsilon(x) \quad (2)$$

où  $d(x)$  est l'endommagement de la fibre  $x$  et varie de 0 à 1, et  $k_0$  est la constante de raideur, identique en tout point et prenant la valeur unitaire.

A partir de cette l'énergie élastique on dérive l'expression du taux de restitution d'énergie :

$$Y(x) = -\frac{1}{2}\epsilon^2(x)k_0\frac{\partial C(d)}{\partial d} = \epsilon^2(x)k_0(1 - d(x)) \quad (3)$$

Afin de tenir compte des interactions présentes dans le système lorsque celui-ci s'endommage, on exprime le taux de restitution d'énergie en  $x$  à l'aide d'une formulation non-locale [5] [1]

$$\bar{Y}(x) = \int_0^L \alpha(x, \xi)Y(\xi)d\xi \quad (4)$$

où  $\alpha(x, \xi)$  est le noyau d'interaction, défini par la forme quadratique tronquée normalisée :

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_0(x, \xi)}{\int_0^L \alpha_0(x, \zeta)d\zeta}, \quad \alpha_0(x, \xi) = \langle 1 - \frac{(x - \xi)^2}{R^2} \rangle^2 \quad (5)$$

L'expression  $\langle \cdot \rangle$  prend la valeur 0 lorsque le terme contenu prend une valeur négative ou nulle. Dans cette équation  $R$  est la longueur interne. Ainsi, seulement les points séparés par une distance inférieure à  $R$  seront en interaction.

Pour obtenir une loi d'évolution de l'endommagement microscopique à chaque instant  $t$ , on adopte une approche de type champ de phase. En interprétant le paramètre  $d$  comme un paramètre d'ordre, sa dérivée temporelle est alors proportionnelle à la dérivée de l'énergie par rapport à ce paramètre d'ordre. On définit l'énergie totale en  $x$  comme la somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée par l'endommagement. Sa formulation non locale est alors :

$$\bar{W}(x) = \int_0^L \alpha(x, \xi)\frac{1}{2}k_0(1 - d(\xi))^2\epsilon^2(x)d\xi + Y_c(x)d(x) \quad (6)$$

En dérivant par rapport au paramètre d'ordre, la loi d'évolution se présente sous la forme :

$$\frac{\partial d(x)}{\partial t} = -M\frac{\partial \bar{W}}{\partial d}(x) \quad (7)$$

où  $M$  est une constante de mobilité qui permet de décrire la cinétique du processus. En tenant compte des interactions entre fibres, on obtient alors la loi d'évolution :

$$\frac{dd(x)}{dt} = -M \int_0^L \alpha(x, \xi) (Y(\xi) - Y_c(x)) d\xi = -M \langle \bar{Y}(x) - Y_c(x) \rangle \quad (8)$$

L'endommagement local dépend ainsi de la vitesse de chargement et tient compte de l'état des autres fibres du réseau via des interactions qui sont définies par le noyau. On retrouve une loi d'évolution comparable aux systèmes fragiles où la vitesse de la fissure est déterminée par la différence entre le taux de restitution d'énergie et l'énergie de rupture [2] [7].

### 3 Intégration numérique

Nous proposons un algorithme de discrétisation du modèle présenté dans la section précédente en considérant un réseau discret de  $N$  fibres réparties sur l'intervalle  $[0, L]$  et espacées d'une distance  $\delta = L/N$ . Pour la résolution, on applique une méthode incrémentale itérative. Sur un pas de chargement, la valeur de  $\bar{Y}(x)$  est recalculé en tout  $x$  à chaque itération. Pour ce réseau fini on a recours à une discrétisation de l'intégrale :

$$\bar{Y}(x, t) = \epsilon^2(x, t) k_0 \delta \sum_{\xi=1}^N \alpha(x, \xi) (1 - d(\xi, t)) \quad (9)$$

On détermine l'évolution du paramètre d'endommagement de chaque fibre par une discrétisation en temps de l'équation d'évolution via un schéma explicite.

$$d(x, t + dt) = d(x, t) - M \langle \bar{Y}(x, t) - Y_c(x) \rangle dt \quad (10)$$

où  $dt = \Delta_0/v$ , avec  $\Delta_0$  le pas de chargement, et  $Y_c(x)$  une valeur seuil tirée dans une distribution uniforme. L'intensité du désordre dans le système peut être quantifié à partir de l'écart type  $\sigma_{Y_c}$  de la distribution de seuils, que l'on choisit égal à  $\sigma_{Y_c} / \langle Y_c \rangle = 0.85$ . On détermine alors de nouveau la valeur des taux de restitution non-locaux et on itère jusqu'à la convergence de la solution numérique. Une fois celle-ci obtenue on applique un nouveau pas de chargement.

### 4 Résultats

On s'intéresse à l'effet de la longueur interne et du taux de sollicitation sur la réponse macroscopique du système. On varie  $R$  de  $1\delta$ , i.e. indépendance des fibres, à  $\delta N/2$  qui correspond à l'interaction de l'ensemble des fibres du système. Ensuite on varie la vitesse de chargement, avec  $v$  allant de  $5 \cdot 10^{-4}$  à 0.3.

Sur la Figure 1 sont présentées les réponses macroscopiques force-déplacement lorsque chacun des paramètres varie. Pour de faibles vitesses de chargement et quelque soit  $R$ , le système présente d'abord une réponse linéaire élastique, puis de l'érouissage jusqu'au pic, après lequel le matériau s'adoucit. La vitesse de chargement affecte l'amplitude du pic. Celle-ci est d'autant plus grande que la vitesse est élevée. On atteint un comportement indépendant de la vitesse de chargement pour  $v < 5 \cdot 10^{-3}$ . Dans cette limite quasi-statique, on étudie alors l'effet de la zone taille de la zone d'influence.

Pour  $R$  suffisamment grand, on observe des fluctuations ainsi qu'un érouissage plus important alors que le pic est retardé. Dans le cas où les fibres se comportent de manière indépendante, le pic est atteint pour un faible déplacement l'érouissage pré-pic est faible, indiquant le caractère plus fragile du système. On note qu'il y a une nette transition de comportement pour les petites et grandes valeurs de  $R$ . Lorsque la localisation est forte ( $R$  faible), la réponse macroscopique est très sensible à la valeur de  $R$ , tandis que pour  $R \geq 10$ , l'augmentation de  $R$  ne semble pas influencer. On retrouve ici une caractéristique des modèles de réseaux de fibres : l'existence de deux classes de modèles. Les modèles avec forte localisation qui permettent d'observer une rupture fragile, et les modèles de partage

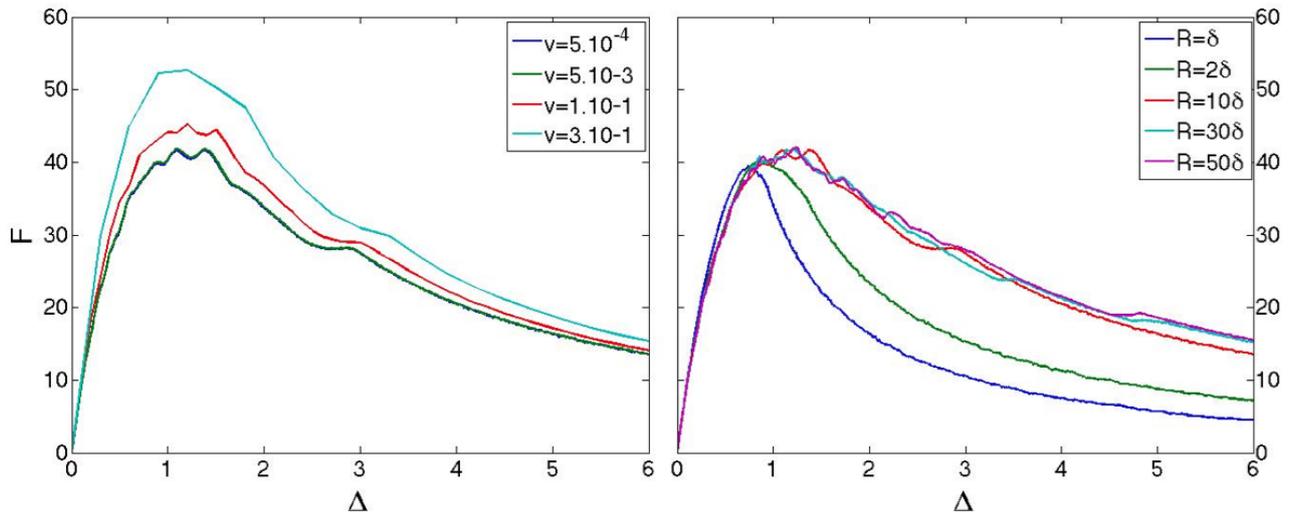


FIGURE 1 – Réponse macroscopique force-déplacement pour différentes vitesses de chargement (à gauche) et différentes tailles de la longueur microscopique.

démocratique de la force qui décrivent la rupture quasi-fragile. Suivant la longueur microscopique interne, notre modèle considéré s'approche plus d'une classe que de l'autre.

On définit l'énergie dissipée lors d'une avalanche (nombre de fibres endommagées lors d'un incrément de chargement) de la manière suivante :

$$dE(t) = \frac{1}{2} \Delta^2(t) k_0 \delta \sum_{x=1}^N \left( (1 - d(x, t^-))^2 - (1 - d(x, t^+))^2 \right) \quad (11)$$

où  $d(x, t^-)$  est l'endommagement en  $x$  juste avant application du pas de chargement (valeur issue de la convergence de la solution au pas de chargement précédent) et  $d(x, t^+)$  sa valeur lors de la convergence de la solution lors de ce pas de chargement.

Sur la Figure 2, pour différentes valeurs des paramètres  $R$  et  $v$ , on présente l'énergie dissipée en fonction de la distance au pic, définie par

$$\frac{|F_c - F|}{F_c} \quad (12)$$

où  $F_c$  est la force macroscopique au pic. Cette grandeur vaut 1 lorsqu'on endommage le système pour la première fois et 0 lorsque le pic est atteint.

La première observation est le caractère intermittent de l'énergie dissipée lorsque la vitesse de chargement est faible ( $v = 5 \cdot 10^{-4}$ ), et qui n'est pas observé dans le cas de grandes vitesses ( $v > 5 \cdot 10^{-3}$ ). L'amplitude est faible au début de la vie du réseau et augmente lorsqu'on se rapproche du pic. Pour le cas de l'indépendance des fibres (sans interaction,  $R = \delta$ ), l'amplitude des fluctuations reste plus ou moins constante après le pic. Lorsque la taille de la zone d'interaction augmente, l'amplitude de ces fluctuations augmente et le matériau semble dissiper plus d'énergie lors des avalanches une fois le pic atteint.

L'intermittence est une caractéristique essentielle de la rupture quasi-fragile. Elle est observée numériquement et expérimentalement [3] [4] sur plusieurs grandeurs, telles que l'énergie dissipée, le temps d'attente entre deux avalanches ou encore la taille de ces avalanches.

Sur la Figure 3, on représente la taille du plus grand *cluster* de fibres endommagées, définie comme le plus grand nombre de fibres successives spatialement qui dont le paramètre d'endommagement est supérieur à 0.5 (à gauche) ou à 0.7 (à droite), en fonction de la distance au pic. Une transition est visible lorsqu'on est au pic : la taille du cluster augmente alors rapidement jusqu'à atteindre la taille du système. Toutes les fibres sont alors fortement endommagées. Ainsi, lorsque le pic est atteint,

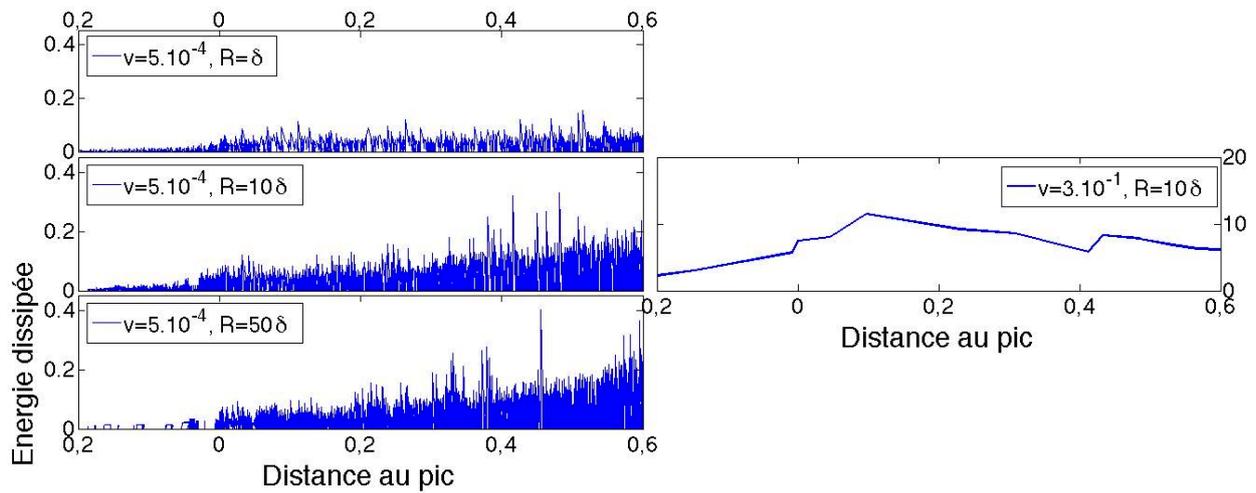


FIGURE 2 – Energie dissipée lors d’une avalanche en fonction de la distance au pic, pour différentes longueurs microscopiques et deux vitesses de chargement.

l’endommagement se développe préférentiellement dans une région plus faible et forme progressivement une bande macroscopique endommagée. Lorsque le seuil d’endommagement augmente, la transition est plus douce et le cluster atteint la taille du système pour de plus grand chargement.

La vitesse de chargement influe peu sur la zone de transition et l’endommagement global du système. En revanche, cette transition et le chargement correspondant à l’endommagement de l’ensemble des fibres du réseaux semblent plus sensibles à la taille de la zone d’interaction. Lorsqu’un grand nombre de fibres interagissent la localisation diminue et on retarde l’endommagement global du réseau, tandis que pour une forte localisation la transition est très abrupte et on endommage tout le réseau pour de plus faibles chargements.

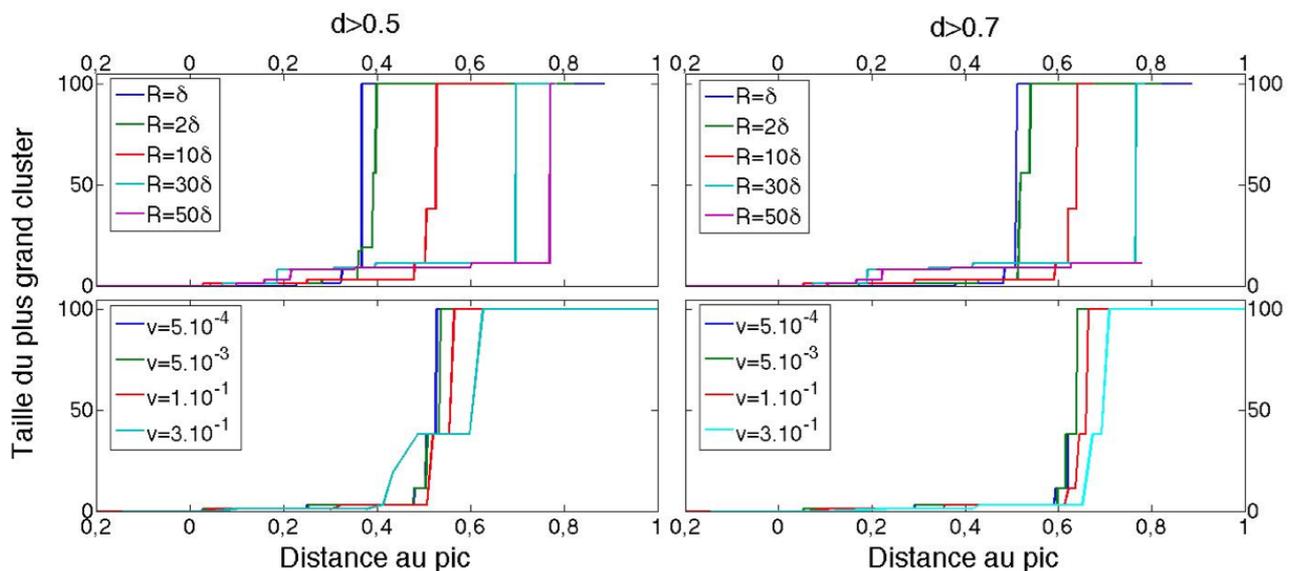


FIGURE 3 – Taille du plus grand cluster lorsque le seuil d’endommagement est 0.5 (à gauche) et 0.7 (à droite) suivant la distance au pic pour différentes longueurs internes (en haut) et différentes vitesses de chargement (en bas).

## 5 Conclusions

Nous avons développé un modèle continu contrôlant des interactions à plus ou moins longue portée et dépendant de la vitesse de chargement. La formulation à partir d'une approche de type champs de phase et l'utilisation d'une expression non-locale intégrale nous a permis d'obtenir une loi d'évolution de l'endommagement en tout point de système.

En appliquant ce modèle à un réseau de fibres, nous avons étudié l'influence de la taille de la longueur interne et de la vitesse de chargement. La réponse macroscopique force-déplacement et l'intermittence de l'énergie dissipée nous ont permis d'identifier deux catégories de matériaux : ceux dont la rupture est de type fragile ( $v > 5 \cdot 10^{-3}$  et/ou  $R < 10\delta$ ) et ceux dont la rupture se rapproche du cas quasi-fragile. L'étude spatiale de la taille du plus grand cluster de fibres endommagées nous montre un chargement de processus d'endommagement lorsque le pic de la courbe force-déplacement est atteint : l'endommagement se localise alors de manière à développer une bande d'endommagement macroscopique qui atteint la taille du réseau après le pic.

Ces premiers éléments nous encouragent à approfondir cette étude en utilisant différentes approches. Dans un premier temps une approche issue de la physique statistique en utilisant des outils tels que les fonctions de densités de probabilités pour étudier les distributions temporelles des événements d'endommagement, ou encore des fonctions de corrélations afin de faire une analyse de la répartition et l'organisation spatiale de ces derniers.

Nous aurons enfin recours à une approche d'homogénéisation en faisant un développement asymptotique au second ordre pour obtenir la réponse d'un volume élémentaire représentatif (VER) en tenant compte de la non-localité. On comparera alors numériquement la réponse d'un VER à celle du système afin d'observer les limites de cette approche lorsque l'endommagement devient important.

## Références

- [1] Bažant Z. P., Jirásek M. 2002 Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage : Survey of Progress *Journal of Engineering Mechanics*
- [2] Bonamy D., Santucci S., Ponsón L. 2008 Crackling Dynamics in Material Failure as the Signature of a Self-Organized Dynamic Phase Transition. *Physical review Letters* **101** 045501
- [3] Girard L., Amitrano D., Weisse J. 2010 Failure as a critical phenomenon in a progressive damage model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*
- [4] Guarino A., Garicimartín A., Ciliberto S. 1998 An experimental test of the critical behaviour of fracture precursors *The European Physical Journal B* **6**, p.12-24
- [5] Pijaudier-Cabot G., Bažant Z. P. 1987 Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* vol. 113, p.1512-1533
- [6] Pradhan S., Hansen A., Chakrabarti B.K. 2010 Failure processes in elastic fiber bundles. *Reviews of modern physics* vol. 82
- [7] Ponsón L., Bonamy D. 2010 Crack propagation in brittle heterogeneous solids : Material disorder and crack dynamics. *International Journal of Fracture* **162** :21-31